Eigenwertgleichungen in der Kurventheorie – Charakterisierung von Kurven, deren Abwicklung und Evolute durch Streckung ineinander überführbar sind

Prof. Dr. Angela Schwenk-Schellschmidt, Prof. Dr. Udo Simon |
Forschungsschwerpunkt: Differentialgeometrie ebener Kurven

Kurzfassung
Es werden ebene Kurven mit positiver Krümmung κ und sphärischem Bogenlängenparameter untersucht, deren Krümmungsradius κ^{-1} eine Eigenwertgleichung erfüllt. Für diese Kurvenklasse ergeben sich aus der Eigenwertgleichung geometrische Eigenschaften bezüglich ihrer Evoluten und Abwicklungen. Für jede Kurve c dieser Klasse gilt, dass der Krümmungsradius ihrer Evolute die gleiche Eigenwertgleichung wie κ^{-1} von c erfüllt. Alle Kurven dieser Klasse werden vollständig lokal klassifiziert.

Abstract
We study plane curves with positive curvature κ and spherical parametrization s. t. their radii of curvature κ^{-1} satisfy an eigenvalue equation. This class is being investigated in terms of evolutes and involutes and their geometric properties in relation to the eigenvalue equations considered. For a curve c in this class, the radius of curvature of its evolute's satisfies the same eigenvalue equation like κ^{-1} of c. We give a complete local classification of all types of curves in this class.

Einleitung

Bereits Jakob Bernoulli wusste, dass Evoluten von logarithmischen Spiralen und allgemeinen Zykloiden die gleiche Form wie die Ausgangskurve haben [1]. Durch zweifache Anwendung der Aussage, ergibt sich für diese Kurven, dass die Evolute durch Parallelverschiebung und/oder Drehstreckung/Drehstauchung aus einer geeigneten Abwicklung hervorgeht. Diese Beziehung zwischen Evolute und Abwicklung wird an Beispielen demonstriert.

Es zeigt sich, dass diese Eigenschaft charakteristisch für die betrachtete Kurvenklasse ist; sie ist außerdem äquivalent dazu, dass der Krümmungsradius eine Eigenwertgleichung erfüllt. Der zugehörige Eigenwert ist genau der Streckungs- bzw. Stauchungsfaktor. Einige der betrachteten Kurvenklassen spielen eine wichtige Rolle bei der Konstruktion von Zahnrändern [2].

Erläuterung der benutzten geometrischen Größen

Sphärischer Bogenlängenparameter

Abb. 1 zeigt eine Kurve c und in einigen Kurvenpunkten jeweils den Tangenteneinheitsvektor T. Die kleine Grafik oberhalb der Kurve in Abb. 1 enthält das so genannte sphärische Bild der Kurve, das entsteht, wenn die Tangentenvektoren so parallel verschoben werden, dass sie in einem gemeinsamen Punkt angreifen. Für die Zeichnung der Tangentenvektoren wurden die Kurvenpunkte nun so gewählt, dass im sphärischen Bild die Tangentenvektoren stets den gleichen Winkelabstand besitzen. Für ebene Kurven mit positiver Krümmung κ gibt es eine Parametrisierung, die mit der Bogenlänge σ des sphärischen Bildes übereinstimmt: die so genannte Parametrisierung nach der sphärischen Bogenlänge. Bei dieser Parametrisierung ergibt jede äquidistante Unterteilung des Parameterbereichs, dass benachbarte Tangentenvektoren stets gleichen Winkelabstand besitzen.

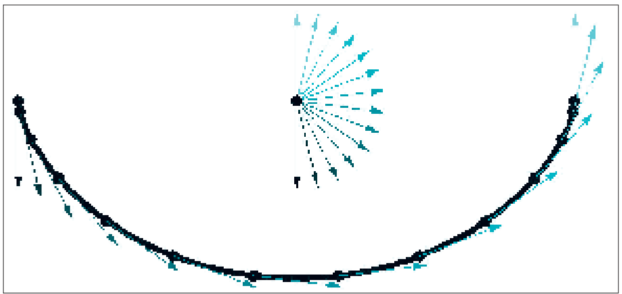

Abb. 1: Zykloide mit sphärischem Bogenlängenparameter

Abwicklung einer Kurve

Sind eine Kurve c und ihre Bogenlängenfunktion s gegeben, dann ist die Abwicklung A_{s_1} von c mit Parameter s_1 definiert durch $A_{s_1}(\sigma)=c(\sigma)-(s(\sigma)+s_1)T(\sigma)$. Wenn $(s(\sigma)+s_1)$ positiv ist, dann lässt sich A_{s_1} als Fadenabwicklung deuten. Dazu stellt man sich einen eng an der Kurve anliegenden Faden vor, der abgewickelt wird. Abb. 2 zeigt Momentaufnahmen eines Fadens, der um einen Kreis aufgewickelt

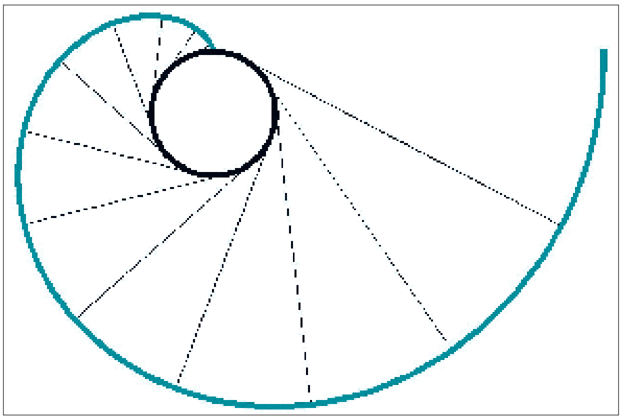

Abb. 2: Abwicklung eines Kreises, als Fadenabwicklung veranschaulicht

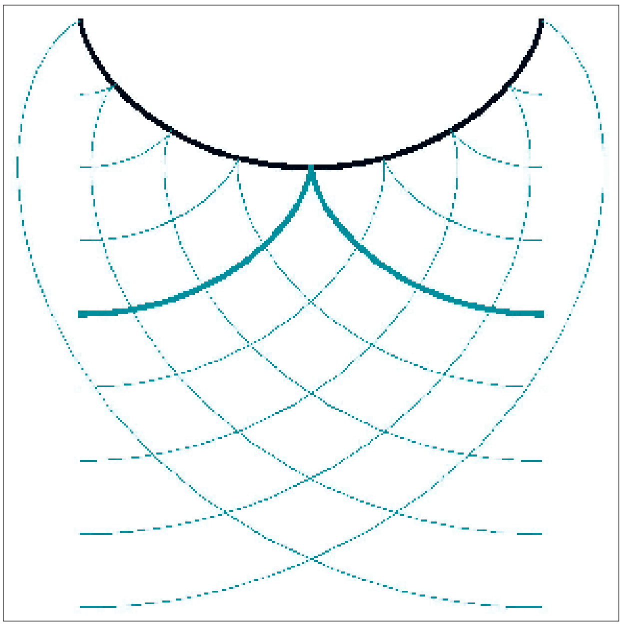

Abb. 3: Schar von Abwicklungen einer Zykloide.

war, während des Abwickelvorgangs. Das Ende des straff gespannten Fadens beschreibt dann die Abwicklung (grün) von c, die Länge des abstehenden Teils des Fadens ist $(s(\sigma)+s_1)$. Der Parameter s_1 kann als Anfangslänge des Fadens interpretiert werden. I. A. ergibt die Abwicklung einer Kurve eine völlig andere Kurve als die Ausgangskurve. Die Abwicklung des Kreises ähnelt einer Spirale und auf keinen Fall einem Kreis. Wird der Parameter s_1 variiert, erhält man eine Schar von Abwicklungen, die eine parallele Kurvenschar darstellt. Abb. 3 zeigt eine solche Schar von Abwicklungen einer Zykloide. Die hervorgehobene Kurve in Abb. 3 ergibt sich bei besonderer Wahl des Parameters s_1, sie ist als Besonderheit auch eine Zykloide.

Evolute einer Kurve

Die Mittelpunkte der Krümmungskreise einer Kurve c bilden die so genannte Evolute E der Kurve. Es gilt $E(\sigma)=c(\sigma)+\kappa(\sigma)^{-1}N(\sigma)$, dabei sind κ die Krümmung und N die Normale. In Abb. 4 werden eine Ellipse (schwarz) und für drei ausgewählte Punkte die zugehörigen Krümmungskreise gezeigt. Die Mittelpunkte sind jeweils markiert, sie liegen auf der Evolute (grün).

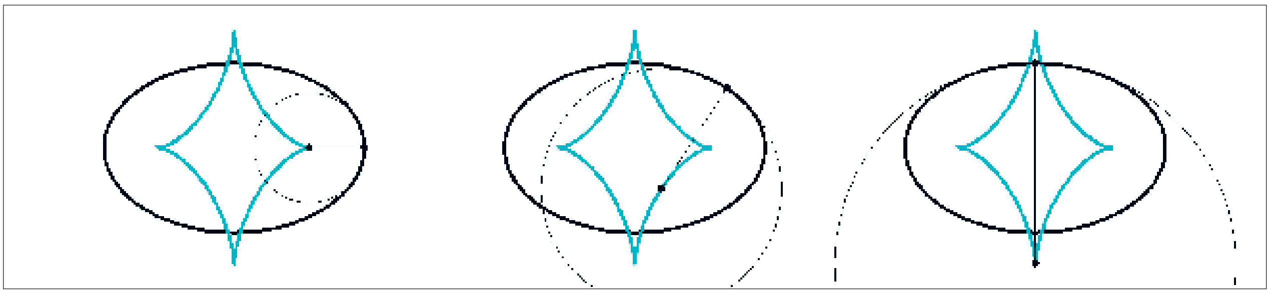

Abb. 4: Ellipse mit einigen Krümmungskreisen und ihrer Evolute

Zykloiden und logarithmische Spiralen

Allgemeine Zykloiden sind Bahnkurven eines beobachteten Punktes, der sich auf dem Rand eines rollenden Kreises befindet. Die Bahnkurve heißt Zykloide, wenn ein Kreis auf einer Geraden abrollt. Rollt ein Kreis außen auf einem feststehenden Kreis ab, so heißt die Bahnkurve Epizykloide, rollt er innen ab, heißt sie Hypozykloide. Abwicklungen und Zykloiden spielen eine wichtige Rolle bei der Konstruktion von Zahnrädern [2].
Allgemeine Zykloiden besitzen eine besondere Eigenschaft, die durch die Abb. 5 bis Abb. 7 dargestellt ist. Dort sind jeweils die Kurve (schwarz), die Abwicklung A_{s_1} für einen geeigneten Parameter s_1(dunkel grün) und die Evolute E (hell grün) gezeichnet. Die Pfeile verbinden jeweils Punkte der Abwicklung $A_{s_1}(\sigma)$ mit Punkten der Evolute $E(\sigma)$, so sind deren besondere Beziehungen zu einander gut zu erkennen: Abwicklung und Evolute der Zykloide in Abb. 5 lassen sich durch eine Parallelverschiebung in einander überführen. Die Evolute der Epizykloide erhält man durch Stauchung aus der Abwicklung (Abb. 6), bei der Hypozykloide durch eine Streckung (Abb. 7).

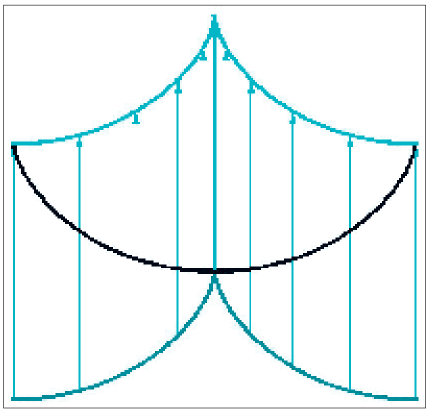

Abb. 5: Zykloide

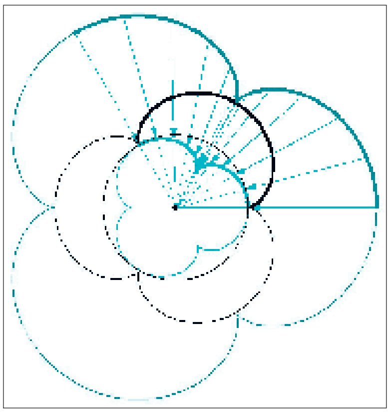

Abb. 6: Epizykloide

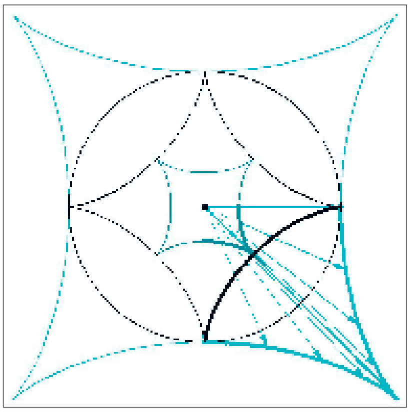

Abb. 7: Hypozykloide

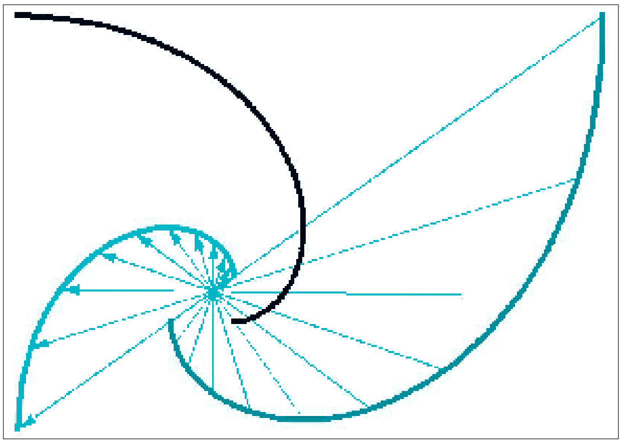

Abb. 8: Logarithmische Spirale

Obwohl die logarithmische Spirale sich in ihrer Form völlig von den Zykloiden unterscheidet, hat sie aber eine ähnliche Eigenschaft: Die Evolute der logarithmischen Spirale kann man durch eine Streckung oder Stauchung mit anschließender Punktspiegelung aus einer geeigneten Abwicklung erhalten; bei der logarithmischen Spirale in Abb. 8 ist es eine Stauchung mit Punktspieglung.
Weitere Beispiele sind in [3].
Diese besonderen Eigenschaften der allgemeinen Zykloiden und der logarithmischen Spirale waren bereits Bernoulli bekannt [1].
Es stellt sich nun die Frage, ob es weitere Kurven gibt, deren Abwicklung und Evolute durch Streckung, Stauchung mit einem Faktor $a \neq 0$, Parallelverschiebung bzw. Punktspiegelung auseinander hervorgehen.

Charakterisierende Eigenschaften

Es konnte nun gezeigt werden, dass die einzigen Kurven, bei denen ihre Abwicklung und ihre Evolute sich durch Strecken bzw. Stauchen und Parallelverschieben ineinander überführen lassen, Zykloiden, Epizykloiden, Hypozykloiden oder Kurven sind, die als Superposition von zwei logarithmischen Spiralen darstellbar sind. Gleichzeitig ist diese Kurvenklasse lokal durch Differentialgleichungen vom Typ Eigenwertgleichung eindeutig bestimmt.

Satz [1]:

Sind c eine Kurve mit positiver Krümmung κ, T, N ihr Tangenten- bzw. Normalenfeld, A_{s_1} ihre Abwicklung zum Parameter s_1, E ihre Evolute, σ ihr sphärischer Bogenlängenparameter und $a \neq 0$ eine beliebige Konstante. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Für den Krümmungsradius κ^{-1} gilt $\frac{d^2\kappa^{-1}}{d\sigma^2} + a\kappa^{-1} = 0$.

b) Es gibt $s_1 \in \mathbb{R}$, so dass sich die Evolute E und die Abwicklung A_{s_1} von c durch eine Streckung bzw. Stauchung und anschließender Parallelverschiebung ineinander überführen lassen, d. h. $E = aA_{s_1} + const.$ (Im Fall $a = 1$ ist es nur eine Parallelverschiebung, im Fall $a < 0$ ist eine Punktspiegelung mit eingeschlossen.)

c) Je nach Wert von a ist c eine der folgenden Kurven
- $a < 0 : c$ ist Teil einer Überlagerung von zwei logarithmischen Spiralen. (Abb. 9)
- $0 < a < 1 : c$ ist Teil einer Epizykloide.
- $a = 1 : c$ ist Teil einer Zykloide.
- $1 < a : c$ ist Teil einer Hypozykloide.

Wird zusätzlich $a \neq 1$ vorausgesetzt, dann lassen sich die Äquivalenzen erweitern um

d) Es gibt $s_1 \in \mathbb{R}$ und ein Zentrum $p_0 \in \mathbb{R}^2$, so dass sich die Evolute und die Abwicklung ohne Parallelverschiebung allein durch eine Streckung bzw. Stauchung mit p_0 als Zentrum in einander überführen lassen, d. h. $E - p_0 = a(A_{s_1} - p_0)$.

Darüber hinaus lässt sich zeigen, dass der Krümmungsradius κ_E^{-1} der Evolute jeder Kurve aus dieser Kurvenklasse die gleiche Eigenwertgleichung wie in a) erfüllt. Durch fortgesetzte Evolutenbildung kann die Kurvenklasse also nicht verlassen werden.
In Abb. 9 ist die Überlagerung von zwei logarithmischen Spiralen dargestellt. Dabei wurde der Faktor a so gewählt, dass Abwicklung und Evolute durch eine reine Punktspiegelung in einander überführt werden.

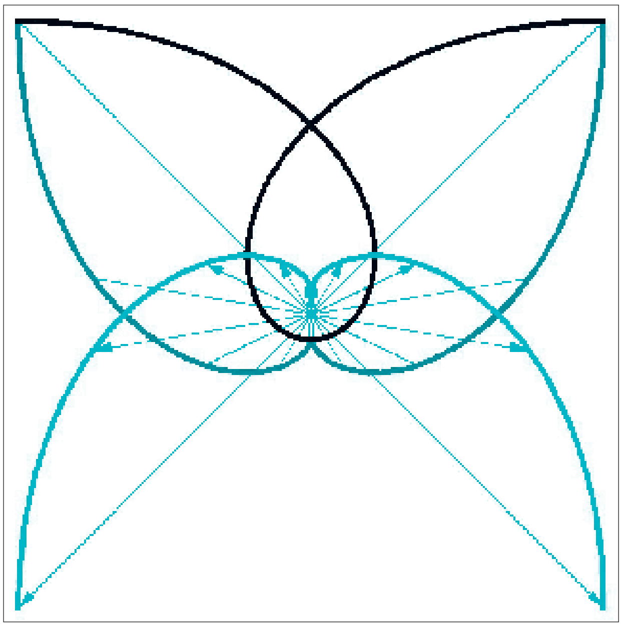

Abb. 9: Überlagerung zweier logarithmischer Spiralen

Literatur

[1] K. Strubecker: Differentialgeometrie I, Kurventheorie der Ebene und des Raumes., De Gruyter Berlin (Sammlung Göschen, vol. 1113–1113a) 1964, Seiten 91, 103

[2] W. Tochtermann, F. Bodenstein: Konstruktionselemente des Maschinenbaues. 8. Aufl. Springer Berlin etc., 1968.

[3] A. Schwenk-Schellschmidt: http://www.tfh-berlin.de/~schwenk/Veroeffentlichungen/evolutes-involutes/ [Letzter Zugriff: 26.08.2006]

[4] S. Müller, A. Schwenk-Schellschmidt, U. Simon: Eigenvalue equations in curve theory, Part II: Evolutes and Involutes, Resultate der Mathematik, erscheint demnächst.

Kontakt

Prof. Dr. Angela Schwenk-Schellschmidt
Technische Fachhochschule Berlin
FB II
Luxemburger Straße 10
13353 Berlin
Haus Beuth, Raum A 132a
Tel.: 030-4504-2351
E-Mail: schwenk@tfh-berlin.de
Web: http://www.tfh-berlin.de/~schwenk/

Prof. Dr. Udo Simon
Institut für Mathematik
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin
E-Mail: simon@math.tu-berlin.de